Ax–Grothendieckの定理

多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は単射ならば全射．

▶ お断り

- ご指摘がある場合は作者 (連絡先は概要欄に掲載) までご連絡下さい.
- 誤りが発見された場合,
  - 容易に修正可能な誤りならば，概要欄に訂正を掲載します.
  - 容易に修正可能でない誤りならば，動画を非公開にします.
- 環は全て可換であるとします.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

この定理は Ax–Grothendieck の定理と呼ばれる定理です.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

主張自体は初等的ですが，証明はそこまで易しくありません.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

この定理の証明としてはモデル理論を用いたものが有名です.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

モデル理論による証明は例えば田中一之『数学基礎論序説』定理 6.4.8 を参照してください.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

詳細は省きますが，その証明ではコンパクト性定理を用いて標数 0 の代数閉体に関する命題を正標数の代数閉体に関する命題に帰着し，そして「有限集合の自己射は単射ならば全射」という命題に持ち込んでいます.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

他方で Grothendieck は EGA (Éléments de géométrie algébrique) の第 IV 巻で，この命題を大幅に一般化した次の命題を代数幾何学的手法を用いて証明しています.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

定理: EGA $\mathbf{IV_3}$.10.4.11

S をスキーム, X を有限型 S スキームとする. X の radiciel な S 上の自己射は全射である.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

定理: EGA IV_3.10.4.11

S をスキーム, X を有限型 S スキームとする. X の radiciel な S 上の自己射は全射である.

radiciel という用語は後ほど説明します.

定理: Ax–Grothendieck の定理

単射な多項式函数 $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は全射である.

定理: EGA IV_3.10.4.11

S をスキーム, X を有限型 S スキームとする. X の radiciel な S 上の自己射は全射である.

今からこの命題の証明に倣って上述の Ax–Grothendieck の定理を証明したいと思います.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

先ず，Jacobson スキームというクラスのスキームを紹介します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

Jacobson スキームの一般論は EGA IV$_3$ 10 章に書いてあるので，興味のある方はそちらを参照して下さい．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

Jacobson スキームを定義する為には Jacobson 空間という概念が必要なので，
それを紹介します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは, X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである. ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

標語的に言えば「閉点が X 全体にぎっしり詰まっている」という感じですね.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

- $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 体 k の素スペクトラム $\operatorname{Spec} k$ は Jacobson 空間である.

例えば $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ や体の素スペクトラムの底空間などは Jacobson 空間です.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

- $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 体 k の素スペクトラム $\operatorname{Spec}k$ は Jacobson 空間である．
- 極大でない素イデアルをもつ局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の素スペクトラム $\operatorname{Spec}R$ は Jacobson 空間ではない．

他方で，$(R, \mathfrak{m})$ を極大でない素イデアルをもつ局所環としたとき，$X = \operatorname{Spec}R$ は Jacobson 空間ではありません．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

- $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, 体 k の素スペクトラム $\mathrm{Spec}\,k$ は Jacobson 空間である.
- 極大でない素イデアルをもつ局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の素スペクトラム $\mathrm{Spec}\,R$ は Jacobson 空間ではない.

というのも，$\mathrm{cl}(X) = \{\mathfrak{m}\}$ の閉包は $\{\mathfrak{m}\} \neq X$ だからです．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

> **定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)**
>
> 位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

- $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, 体 k の素スペクトラム $\operatorname{Spec}k$ は Jacobson 空間である.
- 極大でない素イデアルをもつ局所環 $(R, \mathfrak{m})$ の素スペクトラム $\operatorname{Spec}R$ は Jacobson 空間ではない.

Jacobson 空間は次のような性質を持っています.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

用語を確認しておきます.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

擬構成可能部分集合 (partie quasi-constructible) は EGA の術語で，有限個の開集合 $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ を用いて $(U_1 \cap V_1^c) \cup \cdots \cup (U_n \cap V_n^c)$ と表せる部分集合のことを言います.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

通常，斯様な部分集合のことを単に構成可能部分集合と呼ぶことが多いと思いますが，一応ここでは EGA に忠実に訳します.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である．

1. X は Jacobson 空間である．
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える．

EGA での構成可能部分集合の定義は，有限個の遡(そ)コンパクト (rétrocompact) な開集合 $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$ を用いて $(U_1 \cap V_1^c) \cup \cdots \cup (U_n \cap V_n^c)$ と表せる部分集合です (EGA 0$_{\mathrm{III}}$.9.1.2–3)．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

rétrocompact という術語の定まった訳語は恐らくありませんが，取り敢えず私は遡コンパクトと訳します.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

命題: EGA IV_3.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である．

1. X は Jacobson 空間である．
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える．

ここで位相空間 X の部分集合 Z が遡コンパクトであるとは，任意の擬コンパクト開集合 U に対して $Z \cap U$ が擬コンパクトであることです (EGA 0_{III}.9.1.1)．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

命題: EGA IV_3.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である．

1. X は Jacobson 空間である．
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える．

Noether 空間に於いては全ての部分集合が遡コンパクトなので，擬構成可能部分集合と構成可能部分集合は等しい概念となります．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である．

1. X は Jacobson 空間である．
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える．

以下では殆ど Noether 空間しか扱わないので，擬構成可能部分集合は全て構成可能部分集合と読んで頂いても問題ありません．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV_3.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

では本題に戻ります.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV_3.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

上の命題は位相空間 X が Jacobson 空間であることと，X と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合が全単射に対応することが同値であることを主張しています.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

この命題から次のことが簡単に分かります: Jacobson 空間 X の擬構成可能部分集合 Z が X の全ての閉点を含むならば $X = Z$ である.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

実際，$X \cap \mathrm{cl}(X) = Z \cap \mathrm{cl}(X) (= \mathrm{cl}(X))$ なので，$Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ という対応の単射性より $X = Z$ が分かります.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

この結果は後で用いるので，記憶に留めておきましょう.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV$_3$.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す．

命題: EGA IV$_3$.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である．

1. X は Jacobson 空間である．
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える．

因みに，上の命題では擬構成可能部分集合の対応しか挙げませんでしたが，実は同様のことが開集合や閉集合に関しても言えます．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson 空間

定義: Jacobson 空間 (EGA IV_3.10.3.1)

位相空間 X が **Jacobson 空間**であるとは，X の任意の閉集合 Z に対して $Z = \overline{Z \cap \mathrm{cl}(X)}$ が成立することである．ここで $\mathrm{cl}(X)$ は X の閉点全体の集合を表す.

命題: EGA IV_3.10.1.2

X を位相空間とし，$\mathrm{cl}(X)$ に相対位相を入れるとき，次の条件は同値である.

1. X は Jacobson 空間である.
2. $Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の擬構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の擬構成可能部分集合の全単射を与える.

しかしそれらは今回は用いないので割愛しました.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

さて，Jacobson 空間という概念を導入したので，それを用いて Jacobson スキームを定義しましょう．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

ついでに，Jacobson 環という概念も導入します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV_3.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\mathrm{Spec}\, A$ が Jacobson スキームであることである.

明快ですね.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである．
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである．

例は先ほど挙げたもので差し当たり十分でしょう．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV_3.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

Jacobson 環に関して，次の非常に重要な命題が成立します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである．
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである．

命題: EGA IV$_3$.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

命題: EGA IV$_3$.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である.

この性質は非常に嬉しいですね.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

命題: EGA IV$_3$.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である.

証明は省略します.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV$_3$.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

命題: EGA IV$_3$.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である.

- $\mathbb{Z}$ 上，或いは体上の有限生成代数は Jacobson 環である.

特に，$\mathbb{Z}$ 上，或いは体上の有限生成代数は Jacobson 環であることが分かります.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV_3.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである.
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである.

命題: EGA IV_3.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である.

- $\mathbb{Z}$ 上，或いは体上の有限生成代数は Jacobson 環である.

以上で Jacobson スキームの導入は終わりにしますが，ここで Jacobson スキームがどのようなものなのかという概念的な話をします.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

定義: Jacobson スキーム (EGA IV_3.10.4.1)

1. スキーム X が **Jacobson スキーム**であるとは，X の底空間が Jacobson 空間であることである．
2. 環 A が **Jacobson 環**であるとは，$\operatorname{Spec} A$ が Jacobson スキームであることである．

命題: EGA IV_3.10.4.6

B が Jacobson 環であり，A が有限生成 B 代数であるとき，A も Jacobson 環である．

- $\mathbb{Z}$ 上，或いは体上の有限生成代数は Jacobson 環である．

EGA IV_3 10 章の初めに次のように書かれています．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l’ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> […] le fait que l’ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). […]
> […] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[…]

先ほどの命題にもありましたが，Jacobson スキーム (空間) に於いて閉点は非常に多くの情報を持っています．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

その為，Jacobson スキームでは閉点のみを考えれば良いという状況が屡々現れる訳ですが，これは非常に有難いことです．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

何故ならば，例えば代数閉体 k 上のアフィン空間 $\mathbb{A}_k^n$ を考えるにしても，スキーム論的な状況では閉点ではない点が存在する所為で議論が難しくなり得ますが，

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

閉点以外の点を回避出来るならば，それはただ単に「座標空間 k^n」を扱うようなものになり，議論が非常に簡単になるからです．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

最後に，このことが実感出来る例を一つ見てみましょう．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ Jacobson スキーム

> [...] le fait que l'ensemble des points fermés soit partout dense (et même « très dense » (10.1.3)) permet de ne considérer que ces points dans beaucoup de démonstrations; on rejoint ainsi le point de vue classique des « variétés algébriques » qui, de notre point de vue , sont les ensembles de points fermés des préschémas algébriques sur un corps, et on fait le lien entre le langage des schémas et celui des « variétés » ou « espaces algébriques » de Serre (10.9 et 10.10). [...]
> [...] 閉点の集合が至る所稠密 (延いては「非常に稠密」(10.1.3)) であるという事実によって，多くの証明に於いて閉点以外の点を考えなくて済む．斯くして再び「代数多様体」—即ち我々の言葉で言う所の体上の代数的前スキームの閉点の集合—の古典的な見方が取り戻され，そしてスキームの言葉と「多様体」或いは Serre の「代数的空間」の言葉との間に繋がりが生じる．[...]

この例は後でも使うので，一石二鳥ですね．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

例を述べる為に radiciel 射という概念を定義します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

この同値性の証明は割愛します.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

例えば Fu の *Etale Cohomology Theory* の命題 1.7.1 を参照して下さい.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

ここで次のことが示せます.

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

- 単射な多項式函数から定まる $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は radiciel である.

単射な多項式函数，即ち我々が今考えていたようなもの，から定まる $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は radiciel です.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う．

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である．
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である．
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す．
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である．

- 単射な多項式函数から定まる $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は radiciel である．

実際に示してみましょう．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\, k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

- 単射な多項式函数から定まる $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は radiciel である.

上の 4 条件のうちのどれかを示せば良いですが，ここでは 4 つ目を示します.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

定義: radiciel 射 (Fu 1.7.1)

スキームの射 $f\colon X \to Y$ に関して次の 4 条件は同値であり，これらを満たすとき f は **radiciel 射**であると言う.

1. 任意の射 $Z \to Y$ に関して，それによる f の基底変換 $f'\colon X \times_Y Z \to Z$ は集合の射として単射である.
2. 任意の代数閉体 k に対して $\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, X) \to \mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k, Y)$ は単射である.
3. f は集合の射として単射であり，任意の $x \in X$ に対して $k(x)$ は $k(f(x))$ の純非分離拡大である．ここで $k(x)$ は x に於ける剰余体を表す.
4. 対角射 $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ は全射である.

- 単射な多項式函数から定まる $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は radiciel である.

即ち，F が定める対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射であることを示します．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

先ず，この命題は如何にも成り立ちそうであるということを，厳密ではない議論から確認してみます．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

一旦スキームを忘れて，単なる集合 $\mathbb{C}^n$ 上で考えてみましょう.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

このとき，上の命題は明らかです.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"'] & & \\
& \mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{C}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

ここでの対角射 Δ_F というのは，上のような (集合の圏に於ける) 図式から定まる射です．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"'] & & \\
& \mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{C}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^n = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{C}^n, F(x) = F(y)\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{C}^n\}$$

右下の図式で定まるファイバー積は上のような集合になりますが，F の単射性から，これは $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ の対角集合と同一視出来ます．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}"'] & & \\
& \mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{C}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{C}^n \times_{\mathbb{C}^n} \mathbb{C}^n = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{C}^n, F(x) = F(y)\} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{C}^n\}$$

従って対角射 $\Delta_F : x \mapsto (x,x)$ は全射です．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

ではスキームの場合を考えてみましょう.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

この場合，先の場合ほど簡単ではありません．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

というのも，$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ には閉点でない点も含まれているので，それらに関してもそれが Δ_F の像に含まれていることを示さなければならないのですが，これは意外と難しいです.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

しかし，Jacobson 性を用いると議論がかなり簡単になります．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

少し前に紹介した命題を思い出すと，体上の有限生成代数は Jacobson 環であったので，今 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ や $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は Jacobson スキームになっています．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

Δ_F は Noether スキーム間の有限型射なので，Chevalley の定理 (SGA I.6.2, Fu 1.4.2) より $\Delta_F(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}})$ は $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ の構成可能部分集合ですが，

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

Jacobson 空間に関して以前注意したことにより，$\Delta_F(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ を示す為には，$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ の全ての閉点が Δ_F の像に含まれていることを示せば十分です．

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

以上の議論によって閉点以外の点を考える必要がなくなりました.

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

勿論閉点と雖も通常の意味での「点」ではないので，集合の場合と全く同じという訳にはいきませんが，有理点を考えれば殆ど同様の議論が成立します (ここで $\mathbb{C}$ が代数閉体であることが効いてきます).

▶ Jacobson スキームの一般論

§ 応用例

命題

単射な多項式函数が定める射 F の対角射 $\Delta_F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\Delta_F"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}}"'] & & \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}} \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

このようにして，Δ_F の全射性，即ち F が radiciel 射であることが示せます．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

ここからは，$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ というスキームをより考えやすいスキームに帰着させることを考えます．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

具体的には，スキームの極限を用いて $\mathbb{Z}$ 上有限型なスキームの議論に帰着します．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

以下で紹介するような極限を用いた議論は，代数幾何学で非常に良く用いられる議論です．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

先ずはスキームの極限に関する基礎的な命題を紹介します.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_{\mathbf{3}}$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

この命題を $\mathbb{C}$ に対して用いると，特に次のことが言えます．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \ldots, x_n].$$

先ず，$\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むもの A_0 を一つ固定します．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1,\dots,x_n].$$

これを作る為には，例えば F の係数を $a_1,\dots,a_N$ として，$A_0 = \mathbb{Z}[a_1,\dots,a_N]$ とすれば良いです．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \dots, x_n].$$

そして，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とします．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \dots, x_n].$$

そうすると $\mathbb{C}$ は $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和，即ち余極限であり，同様に $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ も $\{A_\lambda[x_1, \dots, x_n]\}_{\lambda\in\Lambda}$ の余極限なので，これらの素スペクトラムは $\{\operatorname{Spec} A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{\operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \dots, x_n]\}_{\lambda\in\Lambda}$ の極限になります．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \dots, x_n].$$

ここで，各々の $A_\lambda, A_\lambda[x_1, \dots, x_n]$ は有限生成 $\mathbb{Z}$ 代数なので，Jacobson 環であることに注意して下さい．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1,\dots,x_n].$$

- 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $F_\lambda\colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ が定まり，$\lim_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$.

この状況で，全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ 上で F に当たる多項式函数 $F_\lambda\colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ が定まります．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1, \dots, x_n].$$

- 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ が定まり，$\lim_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$.

そして，これらの極限 $\lim_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ が F となります．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1,\dots,x_n].$$

- 全ての $\lambda\in\Lambda$ に対して $F_\lambda\colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ が定まり，$\lim_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$.

当然，F_λ は有限表示の射です．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.2.3, Fu 1.10.1

S_0 をスキーム，$(\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を準連接 $\mathcal{O}_{S_0}$ 代数の順系とし，$\mathcal{A} = \operatorname*{colim}_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ とする．このとき $\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}$ はスキームの圏に於ける逆系 $(\mathbf{Spec}\,\mathcal{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の極限である．

- A_0 を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で F の係数を全て含むものとし，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 上有限生成な $\mathbb{C}$ の部分代数で A_0 を含むもの全体の族とすると

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C} \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda, \quad \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \cong \lim_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda[x_1,\dots,x_n].$$

- 全ての $\lambda\in\Lambda$ に対して $F_\lambda\colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ が定まり，$\lim_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = F$.

また，F 及び任意の F_λ は F_0 の基底変換として得られます．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

さて，ここまでの議論でスキームの射を極限で書き換えました．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

ここで重要になるのが次の命題です．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

即ち，極限の射が何かしらの性質を持つことと，十分大きい λ で同様の性質を持つことは同値です．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV_3.8.10.5

　如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

EGA には全射や radiciel 射以外にも極限に関して同様に振る舞う多くの性質が列挙されていますが，今回は使わないので割愛します.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV_3.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

この命題によって，次のことが分かります．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV_3.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

- 或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射である.

一つに，或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射であるということがわかります.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

- 或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射である.

これは先ほど示した通り，F が radiciel であったからです．

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.10.5

　如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

- 或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射である.
- F が全射であることを示す為には，F_λ が全射であることを示せば十分である.

もう一つに，F が全射であることを示す為には，F_λ が全射であることを示せば十分であるということが分かります.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA IV$_3$.8.10.5

如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

- 或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射である.
- F が全射であることを示す為には，F_λ が全射であることを示せば十分である.
- $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は Jacobson スキームなので，F_λ が全射であることを示す為には $F_\lambda(\mathbb{A}^n_{A_\lambda})$ が $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ の全ての閉点を含むことを示せば十分.

更に，$\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は $\mathbb{Z}$ 上有限型なので Jacobson スキームであり，従って F_λ が全射であることを示す為には $F_\lambda(\mathbb{A}^n_{A_\lambda})$ が $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ の全ての閉点を含むことを示せば十分です.

▶ $\mathbb{Z}$ 上への帰着

§ スキームの極限

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.8.10.5

　如上の状況で，F が全射 (resp. radiciel 射) であることと，或る λ に対して F_λ が全射 (resp. radiciel 射) であることは同値.

- 或る $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は radiciel 射である.
- F が全射であることを示す為には，F_λ が全射であることを示せば十分である.
- $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ は Jacobson スキームなので，F_λ が全射であることを示す為には $F_\lambda(\mathbb{A}^n_{A_\lambda})$ が $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ の全ての閉点を含むことを示せば十分.

以上のことから，問題は $F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$，即ち $\mathbb{Z}$ 上有限型なスキームの閉点に関する話に帰着されます.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

さて，ここまでの議論で問題を $\mathbb{Z}$ 上有限型なスキームに帰着することが出来ました．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

ここで $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質を見ておきましょう．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.10.4.11.1

有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に関して次が成立する.

1. $y \in Y$ が閉点であることはその剰余体 $k(y)$ が有限体であることと同値.
2. 任意の素数 p と正整数 d に対して，集合

$$T_{p,d} := \{y \in Y \mid k(y) \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ の有限次拡大であり，} [k(y) : \mathbb{F}_p] \text{ は } d \text{ の約数}\}$$

は有限集合.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.10.4.11.1

有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に関して次が成立する.

1. $y \in Y$ が閉点であることはその剰余体 $k(y)$ が有限体であることと同値.
2. 任意の素数 p と正整数 d に対して，集合

$$T_{p,d} := \{y \in Y \mid k(y) \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ の有限次拡大であり，} [k(y) : \mathbb{F}_p] \text{ は } d \text{ の約数}\}$$

は有限集合.

- $\mathrm{cl}(Y) = \displaystyle\bigcup_{p:\ \text{素数},\ d:\ \text{正整数}} T_{p,d}.$

1. の主張より，$T_{p,d}$ の元は Y の閉点であり，そして任意の閉点は或る p, d に対する $T_{p,d}$ に含まれていることに注意しましょう．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

命題: EGA IV$_3$.10.4.11.1

有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に関して次が成立する.

1. $y \in Y$ が閉点であることはその剰余体 $k(y)$ が有限体であることと同値.
2. 任意の素数 p と正整数 d に対して，集合

$$T_{p,d} := \{y \in Y \mid k(y) \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ の有限次拡大であり，} [k(y) : \mathbb{F}_p] \text{ は } d \text{ の約数}\}$$

   は有限集合.

- $\displaystyle \mathrm{cl}(Y) = \bigcup_{p\text{: 素数},\ d\text{: 正整数}} T_{p,d}.$

即ち Y の閉点全体の集合は全ての p, d に対する $T_{p,d}$ の和集合になっています.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

命題: EGA $\mathbf{IV_3}$.10.4.11.1

有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に関して次が成立する.

1. $y \in Y$ が閉点であることはその剰余体 $k(y)$ が有限体であることと同値.
2. 任意の素数 p と正整数 d に対して，集合

$$T_{p,d} := \{y \in Y \mid k(y) \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ の有限次拡大であり，} [k(y) : \mathbb{F}_p] \text{ は } d \text{ の約数}\}$$

は有限集合.

- $\mathrm{cl}(Y) = \bigcup_{p:\ \text{素数},\ d:\ \text{正整数}} T_{p,d}$.

では命題を証明していきます.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.

先ず，y が Y の閉点ならば $\pi(y)$ も閉点であることが次の一般的な補題から分かります．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.

- y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f \colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.

- y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

今，$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は Noether な Jacobson スキーム，Y は Noether スキーム，f は有限型射なのでこの補題の仮定を満たしており，従って y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点であることが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

この補題は後ほど証明します.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.

- y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
- $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.

次に，$k(y)$ が有限体の場合も $\pi(y)$ は閉点になります．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
   - $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.

背理法で示します.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.

- y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
- $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.

今 $\pi(y)$ が閉点でない，即ち (0) だったと仮定しましょう．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
   - $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.

このとき体の射 $k((0)) = \mathbb{Q} \to k(y)$ が存在するので，$k(y)$ は有限体になり得ません.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
   - $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.

従って $\pi(y)$ は閉点になります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
   - $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.
   - 「$y \in Y$ が $\mathbb{Z}$ の閉点上にあるとき，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体」という主張を示せば十分.

以上の議論から，1. の主張を示す為には $\pi(y)$ は閉点であるという条件を付け加えても良いことが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.

- y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
- $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.
- 「$y \in Y$が $\mathbb{Z}$ の閉点上にあるとき，$y \in Y$が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体」という主張を示せば十分.

このとき $\pi(y)$ 上のファイバーを考えれば，求める同値性は次の命題から分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

1. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y (構造射を π とする) に対して，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体.
   - y が閉点ならば $\pi(y)$ も閉点.
   - $k(y)$ が有限体ならば $\pi(y)$ は閉点.
   - 「$y \in Y$ が $\mathbb{Z}$ の閉点上にあるとき，$y \in Y$ が閉点 $\Leftrightarrow$ $k(y)$ は有限体」という主張を示せば十分.

命題: EGA I.6.4.2

K を体とし，Y を有限型 K スキームとする．このとき $y \in Y$ が閉点であることは $k(y)$ が K の有限次拡大体であることと同値である．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す．

最後に，先ほど用いた補題を証明します．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.

y を Y の閉点とします.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.

このとき $\{y\}$ は Y の閉集合，従って構成可能部分集合です.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.

すると，Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合になります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$.
  $\to$ X は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$．矛盾.

もしも $f(y)$ が閉点でないと仮定すると $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$ ですが，

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$.
  $\to$ X は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$. 矛盾.

X が Jacobson スキームであることより，$Z \mapsto Z \cap \mathrm{cl}(X)$ は X の構成可能部分集合と $\mathrm{cl}(X)$ の構成可能部分集合の全単射を与えるので，$\{f(y)\} = \emptyset$ となります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す．

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合．
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合．
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$．
  $\to$ X は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$．矛盾．

これは明らかに矛盾です．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$.
  $\to$ X は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$. 矛盾.

従って $f(y)$ は閉点であることが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

　X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$.
  $\to$ X は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$．矛盾.

因みに，この証明では Chevalley の定理を用いる為に Noether 性や有限型であることを仮定しましたが，実はより広く X が Jacobson スキームで f が局所有限型射である場合にも同様の事実が示せます.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

補題

X を Noether な Jacobson スキーム，Y を Noether スキームとし，$f\colon Y \to X$ を有限型射とすると，f は閉点を閉点に移す.

- $y \in Y$ を閉点とすると，$\{y\}$ は Y の構成可能部分集合.
- Chevalley の定理より $f(\{y\}) = \{f(y)\}$ は X の構成可能部分集合.
- $f(y)$ が閉点でなければ $\mathrm{cl}(X) \cap \{f(y)\} = \emptyset$.
  $\to X$ は Jacobson なので $\{f(y)\} = \emptyset$．矛盾.

その証明は EGA IV$_3$.10.4.7 を参照してください.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.

では二つ目の主張に移りましょう.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする. C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.

先ず，Y は有限個のアフィン開集合で覆えるので，初めから Y はアフィンスキームであるとして良いです．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする. C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.

ですから, Y は有限生成 $\mathbb{Z}$ 代数 C を用いて $Y = \operatorname{Spec} C$ と表せるとします.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする. C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.

$\mathbb{Z}$ 上の C の生成元を $t_1, \dots, t_n$ としておきます.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$; $y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.

y を $T_{p,d}$ の元とすると，$k(y)$ は $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体で，その拡大次数は d の約数なので，$k(y)$ は $\mathbb{F}_{p^d}$ の部分体と同型になります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.

従って射 $k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d}$ が存在します.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \ldots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.

各々の $y \in T_{p,d}$ に対して，それが自然に導く射 $C \to k(y)$ に前述の $k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d}$ を合成した射 $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ を対応させる写像 Φ が定まります．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.

ここで $k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d}$ の取り方は複数あり得ますが，各 y に対して一つ選んで固定するものとします.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
     $\because$ $\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d};\ \varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).

このとき，$\varphi\colon C \to \mathbb{F}_{p^d}$ に対して $\varphi^{-1}((0))$ を対応させる写像 Ψ は件の写像のレトラクトになっているので，Φ は単射です.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$; $y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
     $\because$ $\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d}$; $\varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
   - $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \dots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

環の射 $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は C の生成元 $t_1, \dots, t_n$ の送り先で定りますが，$\mathbb{F}_{p^d}$ は有限集合なので，送り先の候補は有限個しかありません.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
     $\because$ $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d};\ \varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
   - $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \dots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

従って，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ の有限性が分かり，単射 $T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ が存在したことから，$T_{p,d}$ も有限集合であることが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.

- Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
- $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$; $y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
  $\because$ $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d}$; $\varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
- $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \dots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

以上によって証明が完了しました.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.

- Y はアフィンスキーム $(\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \ldots, t_n)$ であるとして良い.
- $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d});\ y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
  $\because$ $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d};\ \varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
- $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \ldots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

尚，EGA の証明には如上の写像 $T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は全単射であると書いてありますが，これは誤りだと思われます.

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \ldots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$; $y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
     $\because$ $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d}$; $\varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
   - $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \ldots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

例えば $C = \mathbb{F}_{2^2}, p = 2, d = 2$ とすれば $T_{2,2}$ は $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_{2^2}$ の唯一の点を含む一点集合ですが，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{F}_{2^2}, \mathbb{F}_{2^2})$ は二つの元，即ち恒等射と $\omega \mapsto \omega^2$ となる射を含んでいます．

▶ 有限集合への帰着

§ $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームに関する一般的な性質

2. 有限型 $\mathbb{Z}$ スキーム Y に対して $T_{p,d} := \{y \in Y \mid [k(y) : \mathbb{F}_p]$ は d の約数$\}$ は有限集合.
   - Y はアフィンスキーム ($\operatorname{Spec} C$ とする．C の $\mathbb{Z}$ 上の生成元は $t_1, \dots, t_n$) であるとして良い.
   - $\Phi\colon T_{p,d} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$; $y \mapsto (C \to k(y) \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^d})$ は単射.
     $\because$ $\Psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d}) \to T_{p,d}$; $\varphi \mapsto \varphi^{-1}((0))$ が Φ のレトラクトを与える (即ち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{T_{p,d}}$ を満たす).
   - $C \to \mathbb{F}_{p^d}$ は生成元 $t_1, \dots, t_n$ の送り先で定まるので有限通りの可能性しかなく, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ は有限集合．従って $T_{p,d}$ も有限集合.

しかしここで示した通り，いずれにせよ $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(C, \mathbb{F}_{p^d})$ への単射が存在するので，特に問題にはなりません.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

あと一息です．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

元々考えていた射 $F_\lambda \colon \mathbb{A}^n_{A_\lambda} \to \mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ を再び考えます．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

従って，$T_{p,d}$ は $\mathrm{cl}(\mathbb{A}^n_{A_\lambda})$ の有限部分集合ということになります．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

$T_{p,d}$ と F_λ に関して次の命題が成立します.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

この命題はほぼ明らかです．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- $z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導される.

$z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導されます．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- $z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導される．

従って $k(F_\lambda(z))$ は $k(z)$ の部分体と同型であることが分かります．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- $z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導される．
- $z \in T_{p,d}$ より $[k(F_\lambda(z)) : \mathbb{F}_p] | [k(z) : \mathbb{F}_p] | d$.

z は $T_{p,d}$ の元なので，$k(z)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の拡大次数は d の約数であり，更に $k(F_\lambda(z))$ は $k(z)$ の部分体と同型であることより，$k(F_\lambda(z))$ の拡大次数も d の約数であることが分かります．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- $z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導される.
- $z \in T_{p,d}$ より $[k(F_\lambda(z)) : \mathbb{F}_p] | [k(z) : \mathbb{F}_p] | d$.

従って $F_\lambda(z)$ が $T_{p,d}$ に含まれることが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- $z \in T_{p,d}$ に対して，剰余体の射 $k(F_\lambda(z)) \to k(z)$ が誘導される.
- $z \in T_{p,d}$ より $[k(F_\lambda(z)) : \mathbb{F}_p] | [k(z) : \mathbb{F}_p] | d$.

これで証明出来ました.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

以上で Ax–Grothendieck の定理の証明も殆ど終わりましたね．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.

先の命題から F_λ の $T_{p,d}$ への制限は $T_{p,d}$ からそれ自身への写像となっていることが分かります.

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.

元々 F_λ は radiciel 射と仮定していたので $F_\lambda|_{T_{p,d}}$ も単射ですが，$T_{p,d}$ は有限集合なので，これは全射でもあります．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.

全ての $T_{p,d}$ の合併は $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ の閉点全体の集合と一致していたので，F_λ の像が $\mathbb{A}^n_{A_\lambda}$ の全ての閉点を含むことが分かります．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.

Jacobson スキームの所で見たように，これは F_λ が全射であることを示しています．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.
- $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射.

従って射の極限に関する命題より，F が全射であることが示せました．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} : T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.
- $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射.

これで証明は終わりますが，幾つか補足をしておきます．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} \colon T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.
- $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射.

先ず，従前の議論はそのまま $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ のみならず任意の代数閉体上の有限型スキームに適用出来ます．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

命題

任意の素数 p と正整数 d に対して，$F_\lambda(T_{p,d}) \subseteq T_{p,d}$.

- F_λ は radiciel 射なので $F_\lambda|_{T_{p,d}} \colon T_{p,d} \to T_{p,d}$ は単射．従って全射.
- $F\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は全射.

従って特に代数閉体上の代数多様体に対して同様の定理が成立します．

▶ 有限集合への帰着

§ Ax–Grothendieck の定理の証明

定理: EGA IV_3.10.4.11

S をスキーム，X を有限型 S スキームとする．X の radiciel な S 上の自己射は全射である．

また，冒頭で紹介した EGA に書いてある命題はここで示した命題よりも一般的ですが，S のファイバーごとに考えることにより S が体の場合に帰着することが出来るので，極限を用いた同様の議論に持ち込むことが出来ます．

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory.* World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

最後に参考文献を紹介します.

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory*. World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

Fu の *Etale Cohomology Theory* は第 1 章のみ PDF が公開されています．

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory.* World Scientific. 2011.
  `https://doi.org/10.1142/9569`
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  `https://arxiv.org/abs/math/0206203`
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/`
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/`
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  `http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/`
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

動画内で紹介した極限の議論は同書の 1.10 節に纏まっているので，興味のある方は参照してください．

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory.* World Scientific. 2011. https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971. https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

本動画は基本的に EGA IV$_3$ に沿って作られています.

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory*. World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

EGA はインターネット上で閲覧出来ます.

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory.* World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

また，このスライドは作者のホームページ (リンクは概要欄に掲載) で公開しております．

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory.* World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

以上です.

▶ 参考文献

- Fu, L. *Etale Cohomology Theory*. World Scientific. 2011.
  https://doi.org/10.1142/9569
- **SGA I** Grothendieck, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie : Revêtements étales et groupe fondamental. Lecture notes in mathematics* **224**, Springer-Verlag. 1971.
  https://arxiv.org/abs/math/0206203
- **EGA I** Grothendieck, A., Dieudonné, J. Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **4**. 1960.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/
- **EGA III$_1$** ———. Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie. *Ibid.* **11**. 1961.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/
- **EGA IV$_3$** ———. Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie. *Ibid.* **28**. 1966.
  http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/
- Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate texts in mathematics **52**, Springer-Verlag. 1977.

ご視聴有難うございました.